ЗАДАЧА ОБОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРІИ.

Прив.-Доц. В. КАГАНЪ.

MATHESIS

Прив.-доц. В. КАГАНЪ.

Задача обоснованія геометріи въ современной постановкѣ.

Рѣчь, произнесенная при защитѣ диссертаціи на степень магистра чистой математики.

ОДЕССА.
Типографія Акціонернаго Южно-Русскаго Общества Печатнаго Дѣла.
1908.

Задача обоснованія геометріи въ современной постановкѣ.

Приватъ-доцента *В. Кагана.*

Рѣчь, произнесенная при защитѣ диссертаціи *) на степень магистра чистой математики.

Около 3000 лѣтъ тому назадъ индусскій математикъ Ганези впервые указалъ, что площадь круга равна площади прямоугольника, основаніемъ котораго служитъ полуокружность, а высотой—радіусъ этого круга. Въ подтвержденіе онъ приводитъ такой чертежъ. Кругъ раздѣленъ на 2 полукруга, каждый изъ которыхъ, въ свою очередь, раздѣленъ на 6 секторовъ. Эти секторы съ вытянутыми основаніями размѣщаются въ фигуру, напоминающую двѣ пилы. Если мы сдвинемъ эти двѣ пилы, то получимъ прямоугольникъ, о которомъ идетъ рѣчь. Надъ этимъ чертежомъ, вверху, помѣщено одно слово, долженствующее, очевидно, замѣнить то, что мы называемъ доказательствомъ,—долженствующее удостовѣрить правильность высказанной истины. Это слово гласитъ: „смотри". Это безхитростное аппеллированіе къ интуиціи, какъ единственному удостовѣренію правильности высказанной истины, знаменуетъ, конечно, младенческое состояніе геометріи. Съ какимъ негодованіемъ отвергъ бы такую наивную аргументацію не только современный математикъ, но и всякій, кто обучался въ школѣ геометріи.

Дѣйствительно, съ первыхъ же уроковъ ему твердили, что математика вообще, а геометрія въ частности и въ особенности, есть наука дедуктивная; что истины свои, именуемыя теоремами,

---

*) *В. Каганъ.* „Основанія геометріи". Часть I. Опытъ обоснованія евклидовой геометріи. Часть II. Историческій очеркъ развитія ученія объ основаніяхъ геометріи.

она *доказываетъ*, т. е. путемъ ряда умозаключеній выводитъ ихъ изъ небольшого числа элементарныхъ истинъ, называемыхъ аксіомами, при пособіи опредѣленій; ему твердили, что геометрія признаетъ только *строгія* доказательства, т. е. логически безупречныя, и если бы онъ высказалъ сомнѣніе, нужно ли, въ самомъ дѣлѣ, доказывать такую ясную истину, что изъ точки, взятой на прямой можно къ ней возставить въ плоскости одинъ и только одинъ перпендикуляръ, — то это несомнѣнно вызвало бы строгое осужденіе со стороны учителя.

Преуспѣвалъ ли юноша въ математикѣ или нѣтъ, онъ оставляетъ школу съ одинаковымъ благоговѣніемъ передъ строгой логикой геометрическихъ разсужденій. И если онъ настолько любознателенъ, что склоненъ заглянуть также и въ книгу философскаго содержанія, то глубокая вѣра въ неотразимую силу геометрической логики, привитая учебникомъ и учителемъ, укрѣпляется въ немъ философомъ. Здѣсь математика вообще, а геометрія опять таки въ частности и въ особенности, пріобрѣтаетъ совершенно исключительный ореолъ и, что̀ для насъ особенно важно, — не столько по фактическому своему содержанію, сколько по методамъ изслѣдованія. На геометріи выясняетъ, а часто и строитъ свои теоріи логика, на ней сосредоточены изслѣдованія и сомнѣнія теоріи познанія, ея авторитетомъ нерѣдко прикрываетъ многія безсодержательныя разсужденія метафизика, которой у насъ еще гораздо больше, чѣмъ это принято думать.

Но при всей этой вѣрѣ въ безупречную силу геометрическаго метода, съ тѣхъ поръ, какъ греческій геній оторвалъ геометрію отъ узкихъ задачъ, которыя ей ставили египетскіе жрецы, и сдѣлалъ ее предметомъ свободнаго творчества, наиболѣе глубокіе мыслители всегда высказывали сомнѣнія—если не относительно фактической правильности геометрическихъ истинъ, то относительно убѣдительности геометрическихъ доказательствъ, какъ строго логическихъ выводовъ. „Я часто прихожу къ доказательствамъ“, пишетъ, напримѣръ, Гауссъ, „которыя убѣдили бы всякаго другого; мнѣ же они не говорятъ ничего“.

И дѣйствительно, достаточно лишь немного отрѣшиться отъ вкоренившейся вѣры въ безупречную строгость геометрическихъ доказательствъ, чтобы убѣдиться, что эти сомнѣнія имѣютъ подъ собой глубокія основанія.

Въ самомъ дѣлѣ, что такое логическій выводъ? Принимая извѣстную систему предложеній А, мы часто бываемъ вынуждены принять другія предложенія В, которыя явно, непосредственно въ системѣ А не содержатся. Въ такомъ случаѣ говорятъ, что предложенія В представляютъ собой выводъ изъ системы А, слѣдствіе этой системы. Доказать предложеніе В при помощи системы А — значитъ обнаружить, что, принимая систему предложеній А, мы вынуждены, въ силу законовъ нашего мышленія, принять предложеніе В. Если поэтому система А не дана, то требованіе доказать предложеніе В сводится къ слѣдующему: показать, что, принимая неизвѣстно что, я вынужденъ принять предложеніе В. При всей нелѣпости такого рода задачи трудно повѣрить, какъ часто человѣческая мысль, скажу больше, научная мысль замыкается въ этотъ ложный кругъ. Совершенно несомнѣнно, что современная геометрія, какъ система не интуитивная, а логическая,—представляетъ собой именно такого рода ложный кругъ.

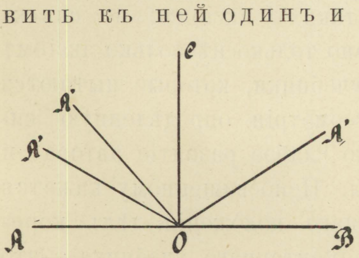
Кто хочетъ въ этомъ убѣдиться, долженъ только спросить себя, гдѣ же та система предложеній А, изъ которыхъ мы должны выводить геометрическія истины. Эти предложенія съ давнихъ поръ назывались аксіомами или постулатами, хотя къ нимъ должны быть отнесены и опредѣленія. Гдѣ же та система аксіомъ, изъ которыхъ выводится наша геометрія? Въ нашихъ учебникахъ геометріи вы ихъ не найдете. Во всѣхъ руководствахъ указывается, что такое аксіома, утверждается, что вся геометрія развивается изъ небольшого числа такихъ аксіомъ; но списка аксіомъ мы не находимъ, всегда указано только нѣсколько аксіомъ въ качествѣ примѣровъ. Тѣ же учебники, которые пытаются дѣйствительно положить въ основу геометріи опредѣленную систему аксіомъ, обнаруживаютъ только слабое развитіе автора и полное отсутствіе знанія литературы. Непосвященному кажется поэтому, что причины такого страннаго положенія дѣлъ коренятся въ дидактическихъ задачахъ элементарнаго учебника,—что гдѣ-то тамъ, въ научной литературѣ эти основныя посылки геометріи приведены, что только школьникамъ предлагается дѣлать выводы изъ того, что имъ неизвѣстно. И многіе, и при томъ лучшіе изъ этихъ юношей, приходя сюда въ университетъ, дѣйствительно настойчиво требуютъ, чтобы мы указали имъ сочиненія, въ которыхъ они найдутъ эти посылки элементарной геометріи, которыя раскроютъ передъ ними ту безупречную логическую дисциплину, о которой они такъ много слышали отъ учителя, учили въ учебникахъ, читали въ философскихъ сочиненіяхъ. И они уходятъ отъ насъ глубоко разочарованными, такихъ сочиненій мы имъ предложить не можемъ. Мы можемъ только, пожалуй, указать имъ небольшое число итальянскихъ и нѣмецкихъ мемуаровъ, относящихся къ послѣднему десятилѣтію и содержащихъ первыя попытки разрѣшить эту задачу. Къ этимъ мемуарамъ мнѣ придется еще возвратиться позже; покамѣстъ замѣчу только, что тѣ, которые рѣшаются въ нихъ заглянуть, обыкновенно оставляютъ ихъ съ поникшей головой; эти сочиненія, относящіяся къ основнымъ элементамъ науки, очень мало доступны.

Такого же сочиненія, которое не только давало бы полную систему геометрическихъ аксіомъ, но фактически строго формально построило бы на нихъ систему геометріи, мы не имѣемъ и по сей день.

Но что же въ такомъ случаѣ представляютъ собой обычныя геометрическія доказательства?

Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, мы разсмотримъ здѣсь одно изъ такихъ доказательствъ, заимствованное изъ наиболѣе распространеннаго у насъ учебника геометріи.

Рѣчь идетъ о теоремѣ, о которой я уже упоминалъ: *изъ точки на прямой можно на плоскости возстановить къ ней одинъ и только одинъ перпендикуляръ*



Фиг. 1.

Вотъ какъ ведетъ доказательство этого предложенія г. Киселевъ.

Пусть AB будетъ данная прямая, O точка на ней (фиг. 1). Нужно доказать, что изъ точки O въ плоскости чертежа можно провести одинъ и только одинъ перпендикуляръ. Предположимъ для этого, что лучъ OA вращается, оставаясь въ плоскости чертежа, вокругъ точки O въ направленіи къ своему продолженію OB. Тогда онъ образуетъ съ начальнымъ своимъ положеніемъ углы AOA′, AOA′, AOA′..., которые сначала остаются меньше своихъ смежныхъ угловъ, а затѣмъ, по мѣрѣ того, какъ лучъ OA приближается къ лучу OB, становятся больше своихъ смежныхъ угловъ. Итакъ, уголъ AOA′ сначала остается меньше своего смежнаго угла, а затѣмъ становится больше его. Въ промежуткѣ, слѣдовательно, будетъ моментъ, когда онъ будетъ равенъ своему смежному углу. Лучъ займетъ тогда положенiе OC, перпендикулярное къ AB. Въ слѣдующiй моментъ уголъ сдѣлается уже больше смежнаго угла, а потому больше одного перпендикуляра быть не можетъ.

Обращаясь къ анализу этого доказательства, замѣтимъ прежде всего, что основнымъ орудiемъ доказательства здѣсь служитъ движенiе. Но что такое движенiе?

Въ отвѣтъ на этотъ вопросъ я отнюдь не намѣренъ дѣлать попытку вводить васъ въ обширную область неясныхъ разсужденiй, которыя предлагаютъ физiологи, психологи, метафизики, — область, въ которой, быть можетъ, только математики завоевали скромный, но прочный уголокъ. На это вѣдь не могъ разсчитывать и авторъ нашего руководства. Ясно, что на движенiе онъ смотритъ, какъ на нѣчто, дальнѣйшему поясненiю не подлежащее: процессъ, усвоенный нами при помощи внѣшнихъ чувствъ, главнымъ образомъ, путемъ созерцанiя, настолько отчетливо, что онъ сдѣлался однимъ изъ основныхъ элементовъ нашего сознанiя. И противъ этого рѣшительно нельзя спорить, поскольку мы пользуемся этимъ процессомъ для нагляднаго поясненiя нашей мысли или факта. Но если мы хотимъ воспользоваться движенiемъ, какъ орудiемъ дедукцiи, логическаго вывода, то мы необходимо должны указать тѣ свойства движенiя, которыя могутъ и будутъ служить посылками этого вывода, которыя въ данномъ случаѣ нужны геометру. И это не фикцiя; всѣ тѣ свойства движенiя, которыя нужны геометрiи, были позднѣе указаны Софусомъ Ли; но ихъ вы еще не найдете въ руководствахъ по геометрiи; нѣтъ ихъ, конечно, и у нашего автора. Движенiе есть для него интуитивный процессъ, и, аппеллируя къ нему, онъ не имѣетъ мужества сказать намъ опредѣленно: „смотри“.

Однако, прослѣдимъ это доказательство дальше. При движенiи луча OA уголъ AOA′ остается сначала меньше смежнаго угла A′OB, а затѣмъ, когда движущiйся лучъ приближается къ OB, онъ становится больше его.

Почему, спросимъ мы. Но вѣдь это ясно, какъ Божій день; развѣ въ этомъ можно усомниться?

Конечно, глазу это совершенно ясно. Но гдѣ же тутъ логика? Гдѣ же тутъ выводъ, гдѣ геометрическая дедукція, гдѣ тѣ предпосланныя свойства этихъ угловъ и движенія, отъ которыхъ можно къ этому факту прійти путемъ умозаключенія? И эти свойства не фикціи. Если бы авторъ дѣйствительно хотѣлъ оставаться на почвѣ вывода, онъ долженъ былъ бы прежде всего указать, что вложено въ самыя понятія больше и меньше, т. е. какими ихъ свойствами въ примѣненіи къ угламъ можетъ воспользоваться геометръ. Указать такія свойства пытались еще Больцано и Грассманъ; въ настоящее время это выполнено Шатуновскимъ и Гильбертомъ. Но старая геометрія, т. е., строго говоря, геометрія прошлаго десятилѣтія отъ этого далека, и нашъ авторъ, приводя свою тираду, молчаливо говоритъ намъ: „смотри".

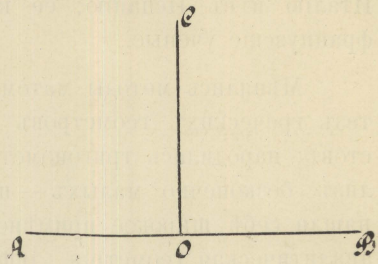
И вслѣдствіе того, читаемъ мы дальше, что уголъ AOA' былъ сначала меньше смежнаго угла, а затѣмъ сталъ больше его, долженъ былъ быть промежуточный моментъ, когда уголъ AOA' былъ равенъ своему смежному углу.

Но изъ чего, изъ какихъ предпосылокъ автора это слѣдуетъ? Въ надлежащей постановкѣ вопроса это дѣйствительно можно вывести изъ принципа непрерывности, какъ его установилъ Дедекиндъ; но этого, конечно, нѣтъ и не можетъ быть въ нашемъ руководствѣ.

Таково „строгое" доказательство одного изъ важнѣйшихъ предложеній геометріи, такова сила „геометрической дедукціи". Это не слабое доказательство, здѣсь нѣтъ и слѣда доказательства; здѣсь нѣтъ даже и попытки произвести умозаключеніе, есть только одна интуиція, есть только то, что древній писатель три тысячи лѣтъ тому назадъ просто выразилъ словомъ „смотри". А если такъ, то не проще ли было отказаться отъ всякаго доказательства, нарисовать вотъ этотъ чертежъ (фиг. 2) и написать наверху правдивое слово Ганези.

Можетъ показаться, что я выбралъ дурное руководство или подобралъ случайно неудачное доказательство. Но это не такъ. Книга, о которой идетъ рѣчь, все же представляетъ собой одно изъ лучшихъ сочиненій этого рода. Если доказательство этого предложенія не содержитъ никакого вывода, то въ другихъ доказательствахъ интуиція уснащаетъ выводъ, дополняетъ его.

Но что же въ этомъ собственно худого? Что худого въ томъ, что геометръ въ своемъ изслѣдованіи и въ доказательствѣ руководствуется не только синтезомъ, но и интуиціей, глазомъ? Развѣ результаты оказались отъ этого менѣе достовѣрными? Развѣ геометрія при этомъ не разрослась въ могучее зданіе, служащее фундаментомъ всѣхъ точныхъ наукъ и въ то же время гордо возвышающее свою главу надъ ними? Да, это такъ; но задача науки заключа ется не только въ томъ, чтобы собирать матеріалъ, факты, которые при достаточномъ накопленіи часто забываются раньше, чѣмъ съ ними успѣли познакомиться. Задача науки заключается также въ томъ,



Фиг. 2.

чтобы объединить эти факты въ одну систему, чтобы указать внутреннюю связь между ними, чтобы установить такъ называемые принципы науки, т. е. тѣ факты, которые обусловливаютъ собой остальные; чтобы выяснить дѣйствительное содержаніе ея истинъ, не умаляя грубой интуиціей того, что въ нихъ содержится, и не присваивая имъ по традиціи того, что въ нихъ не вложено; чтобы отдать себѣ отчетъ въ каждомъ терминѣ, которымъ мы пользуемся, а не считать яснымъ все то, что мы привычно повторяемъ. Задача науки заключается, наконецъ, въ томъ, чтобы выяснить источникъ, изъ котораго мы черпаемъ ея истины; не тѣ, конечно, истины, которыя логически выводятся изъ другихъ и, слѣдовательно, въ этихъ послѣднихъ имѣютъ свой источникъ, а тѣ, которыя сами служатъ предпосылками остальныхъ, такъ называемыя основныя положенія науки, въ геометріи—ея аксіомы и опредѣленія. Но для того, чтобы выяснить источникъ основныхъ положеній науки, ихъ нужно знать, ихъ нужно установить.

Я не знаю, привелъ ли я достаточныя основанія неустанныхъ стремленій выяснить основныя посылки геометріи и дѣйствительно претворить ее въ строго дедуктивную науку. Или, быть можетъ, я еще долженъ былъ сказать, что существуютъ стремленія, которыя сами себѣ довлѣютъ и, тая въ себѣ несознанныя, сокрытыя задачи, обезоруживаютъ противниковъ, а posteriori неожиданно раскрывая передъ ними широкіе горизонты.

Такъ или иначе, но стремленія обосновать геометрію не прекращались въ теченіе трехъ тысячъ лѣтъ ея существованія. Смѣнялись народы, культивировавшіе геометрію. Отъ египетскихъ жрецовъ она перешла къ греческимъ философамъ, развившимъ ее въ обширную науку; съ развалинъ греческой культуры она перешла къ арабамъ и ими вновь перенесена въ Европу — въ Италію и въ Испанію; ее культивировали нѣмецкіе монахи и французскіе ученые.

Мѣнялись методы математическаго изслѣдованія. Тонкій синтезъ греческихъ геометровъ нашелъ опору у арабскихъ аналистовъ; народилась тригонометрія, выросла алгебра, сложился анализъ безконечно малыхъ — и всѣ эти методы и изслѣдованія нашли себѣ широкое примѣненіе въ геометріи. Была построена аналитическая геометрія, дифференціальная геометрія. И точно въ противовѣсъ этимъ алчнымъ стремленіямъ анализа народилась новая синтетическая геометрія, такъ называемая геометрія положенія.

Наконецъ, кореннымъ образомъ мѣнялись философскія воззрѣнія. На смѣну древнимъ умозрѣніямъ и средневѣковой метафизикѣ пришла позитивная философія, предъявлявшая метафизикѣ опредѣленныя положительныя требованія. И при всѣхъ этихъ метаморфозахъ, предъ лицомъ важнѣйшихъ задачъ, разрѣшенія которыхъ настойчиво и неотложно требовали другія науки,—математики не оставляли основъ геометріи и при томъ въ такой мѣрѣ, что я затрудняюсь назвать выдающагося геометра, который не отдалъ бы дани этому направленію.

Первыя попытки обосновать геометрію относятся къ глубокой древности. Гиппократъ Хіосскій написалъ уже въ этомъ направленіи цѣлое сочиненіе въ V вѣкѣ до Р. Х. Какъ объ этомъ, такъ и о другихъ сочиненіяхъ въ этомъ же направленіи мы имѣемъ только косвенныя свѣдѣнія, но глубокій знатокъ греческой геометріи Поль Таннери приходитъ къ заключенію, что это были уже глубоко продуманныя системы. Ни одно изъ этихъ сочиненій до насъ не дошло; всѣ они остались въ тѣни, а затѣмъ были вовсе забыты, когда появилось одно изъ замѣчательнѣйшихъ научныхъ произведеній, какое когда-либо было написано „*Εὐκλείδου στοιχεῖα*“—„Начала Евклида“.

Говорить здѣсь объ Евклидѣ подробно я, конечно, не могу. Кто читалъ эту великую книгу, кто умѣлъ понять тѣ трудности, преодолѣть которыя было необходимо ея автору, тотъ научился удивляться греческому мудрецу и генію народа, представителемъ котораго онъ явился.

Опираясь на труды своихъ предшественниковъ, Евклидъ создалъ замѣчательную геометрическую систему, которая оставила далеко за собой все, что было написано въ этомъ направленіи раньше, и конкуррировать съ которой не рѣшился ни одинъ изъ греческихъ геометровъ, жившихъ послѣ него. *Ὁ στοιχειοτής* — „Составитель Началъ“ сдѣлалось собственнымъ именемъ, подъ которымъ всѣ позднѣйшіе греческіе геометры разумѣли Евклида, а самыя „Начала“ сдѣлались учебникомъ, по которому въ теченіе двухъ тысячелѣтій учились геометріи юноши и взрослые; для математиковъ же эта книга сдѣлалась библіей, источникомъ откровенія.

Каждая изъ 12 книгъ „Началъ“ начинается рядомъ опредѣленій всѣхъ тѣхъ терминовъ, которые въ нихъ появляются; первой же книгѣ предпосланы постулаты *(αἰτήματα)* и аксіомы *(κοιναὶ ἔννοιαι)*. Далѣе слѣдуютъ одна за другой, безъ всякихъ связующихъ разсужденій теоремы съ ихъ доказательствами, со ссылками на предыдущія предложенія, постулаты и аксіомы.

Для Евклида нѣтъ мелочей; всѣ детали доказательствъ, необходимость которыхъ онъ умѣетъ предусмотрѣть, даже наиболѣе легкія, онъ излагаетъ съ тѣмъ же спокойствіемъ, съ какимъ его великій соотечественникъ Гомеръ описываетъ каждый шагъ своихъ героевъ—людей и боговъ.

При всей своей замѣчательной послѣдовательности система Евклида сугубо страдаетъ, конечно, тѣми недостатками, которыхъ, какъ я старался выяснить, не могутъ избѣгнуть и позднѣйшіе авторы; его опредѣленія основныхъ терминовъ расплывчаты и часто настолько безсодержательны, что онъ самъ не въ состояніи ими воспользоваться; его постулаты и аксіомы недостаточны для дѣйствительнаго синтетическаго развитія геометріи; его доказательства представляютъ собой систематическое сплетеніе интуиціи съ выводомъ.

Вскорѣ послѣ Евклида почти одновременно жили и творили три геометра, занимающіе, можно сказать, самое выдающееся мѣсто въ исторіи греческой математики. Это были Архимедъ, Эратосѳенъ и Аппологій. Трудами этихъ геніальныхъ людей геометрія была доведена до высокой степени совершенства. „Евклидъ, Архимедъ, Эратосѳенъ и Аппологій“, говоритъ Морицъ Канторъ, „довели математику до такой высоты, дальше которой старыми средствами ее невозможно было развивать. И не только выше нельзя было подняться, но и достигнутыя вершины науки были вскорѣ изслѣдованы во всѣхъ направленіяхъ. Оставалось вернуться обратно, осмотрѣться, разобраться въ частностяхъ того матеріала, мимо которыхъ проскользнули творцы науки, быстро взбираясь на ея крутизны“.

Съ этой именно эпохи начинается усиленное стремленіе къ обоснованію началъ геометріи; оно ослабѣвало въ періоды паденія общаго интереса къ наукѣ и крѣпло съ ея возрожденіемъ. Оно не прекращалось даже въ эпоху такой интенсивной творческой работы въ области математики, какой являются XVIII столѣтіе и начало XIX. Амперъ, Лейбницъ, Декартъ, Лагранжъ, Лежандръ, Фурье, Гауссъ, — всѣ размышляли объ основаніяхъ геометріи, стараясь, по выраженію Лобачевскаго, „пролить свѣтъ на тѣ темныя понятія, съ которыхъ, повторяя Евклида, начинаемъ мы геометрію“.

„Начала“ Евклида представляли собой ту канву, по которой разматывались эти разсужденія. Оставить его въ сторонѣ и попытаться построить геометрическую систему независимо отъ Евклида не рѣшился никто; его можно было только дополнять и комментировать.

Я не буду останавливаться на этихъ комментаріяхъ, растянувшихся на полтора тысячелѣтія. Они совершили необходимую кропотливую работу отрицательнаго характера. Они выяснили слабыя стороны Евклида, они разрушили легенду о логическомъ совершенствѣ его системы. Но критиковать легко, а творить неизмѣримо труднѣе; не только комментаторы Евклида, но даже Лежандръ, который черезъ два тысячелѣтія впервые вновь рѣшился написать „Начала“ геометріи, не былъ въ состояніи внести въ эту систему коренныхъ улучшеній. Для этого нужно было занять совершенно новую позицію, которая еще не была завоевана.

Это завоеваніе неразрывно связано съ исторіей пятаго постулата въ „Началахъ“ Евклида, который часто называютъ короче „аксіомой о параллельности“.

Содержаніе этого постулата заключается въ слѣдующемъ: если двѣ прямыя, расположенныя въ одной плоскости, при пересѣченіи съ третьей образуютъ внутренніе односторонніе углы, сумма которыхъ не равна двумъ прямымъ, то съ той стороны, гдѣ эта сумма меньше двухъ прямыхъ, эти прямыя пересѣкаются.

Этотъ постулатъ неизмѣримо сложнѣе остальныхъ постулатовъ Евклида; онъ предполагаетъ уже извѣстныя знанія, онъ даже не усваивается сразу. Ему, правда, можно придать болѣе простую форму; большинство присутствующихъ, вѣроятно, знаетъ его въ той формѣ, въ какой онъ приведенъ въ „Началахъ“ Лежандра: если изъ двухъ прямыхъ, расположенныхъ въ одной плоскости, одна перпендикулярна къ сѣкущей, а другая наклонна къ сѣкущей, то онѣ пересѣкаются со стороны остраго угла. Но и въ этой формѣ это далеко не та элементарная истина, какія мы привыкли называть аксіомами. А что, быть можетъ, важнѣе всего, надобность въ этой аксіомѣ появляется довольно поздно: у Евклида въ 29-й теоремѣ; фактически же ее можно было бы отодвинуть еще гораздо дальше, т. е. въ томъ только смыслѣ, что въ „Началахъ“, кромѣ первыхъ 28 теоремъ, есть еще очень много предложеній, которыя могутъ быть доказаны безъ пособія V постулата. Геометрическій матеріалъ, такимъ образомъ, разбивается на двѣ части. Значительная часть этого матеріала совершенно не зависитъ отъ постулата о параллельныхъ, т. е. можетъ быть развита безъ этого постулата; затѣмъ появляется этотъ тяжеловѣсный постулатъ, за которымъ слѣдуетъ вторая часть, ни одна теорема которой не можетъ быть доказана безъ этого постулата. Сюда относится, напримѣръ, теорема о томъ, что сумма угловъ въ треугольникѣ равна $2d$, теорія пропорціональныхъ линій, теорія площадей и объемовъ.

Эта своеобразная роль, которую играетъ пятый постулатъ Евклида, и была причиной того, что явилось стремленіе доказать этотъ постулатъ, т. е. вывести его логически изъ остальныхъ постулатовъ. Трудно себѣ представить, сколько на это было затрачено силъ. Правда, доказательствомъ евклидова постулата занимались и по сей день занимаются многіе, не только не имѣющіе слѣда геометрическаго дарованія, но не имѣющіе даже серьезныхъ знаній. Но въ то же время отъ Птолемея до Лежандра врядъ ли можно назвать выдающагося геометра, который не испыталъ бы своихъ силъ на этой неблагодарной задачѣ, который не попытался бы завоевать эту неприступную крѣпость. Чтобы вы себѣ составили представленіе о томъ, въ какой мѣрѣ эта задача овладѣвала иногда геометромъ, позвольте привести вамъ письмо старика Больэ, друга Гаусса, извѣстнаго венгерскаго профессора, по сочиненіямъ котораго свыше полустолѣтія обучалась вся Венгрія. Это письмо Больэ написалъ своему геніальному сыну Іоанну, когда онъ узналъ, что послѣдній также увлекся задачей о параллельныхъ линіяхъ.

„Молю тебя, не дѣлай только и ты попытокъ одолѣть теорію параллельныхъ линій; ты затратишь на это все свое время, а предложенія этого вы не докажете всѣ вмѣстѣ. Не пытайся одолѣть теорію параллельныхъ линій ни тѣмъ способомъ, который ты сообщаешь мнѣ, ни какимъ либо другимъ. Я изучилъ всѣ пути до конца; я не встрѣтилъ ни одной идеи, которой бы я не разрабатывалъ. Я прошелъ весь безпросвѣтный мракъ этой ночи, и всякій свѣточъ, всякую радость жизни я въ ней похоронилъ. Ради Бога, молю тебя, оставь эту матерію, страшись ея не меньше, нежели чувственныхъ увлеченій, потому что и она можетъ лишить тебя всего твоего времени, здоровья, покоя, всего счастья твоей жизни. Этотъ безпросвѣтный мракъ можетъ потопить тысячи ньютоновскихъ башенъ. Онъ никогда не прояснится на землѣ, и никогда несчастный родъ человѣческій не будетъ владѣть чѣмъ—либо совершеннымъ даже въ геометріи. Это большая и вѣчная рана въ моей душѣ“...

Этого довольно, письмо еще длинно и служитъ доказательствомъ того, что и родительскій совѣтъ тоже можетъ быть неправиленъ, ибо Іоанну удалось разсѣять этотъ мракъ въ теоріи параллельныхъ линій.

Но не въ томъ смыслѣ, чтобы онъ дѣйствительно доказалъ постулатъ Евклида. Всѣ предложенныя доказательства были неправильны; онѣ явно или неявно вводили другой постулатъ, равносильный доказываемому. Эти доказательства стали предметомъ спеціальныхъ изслѣдованій, которыя обнаружили, что ни одно изъ нихъ не выдерживаетъ серьезной критики.

„Многія идеи“, говоритъ І. Больэ, „какъ бы имѣютъ свою эпоху, во время которой онѣ открываются одновременно въ различныхъ мѣстахъ подобно тому, какъ фіалки весной произростаютъ всюду, гдѣ свѣтитъ солнце“.

Больэ даже не зналъ, въ какой мѣрѣ онъ былъ правъ. Вопросъ, представлявшій загадку въ теченіе тысячелѣтій, почти одновременно былъ разрѣшенъ, правда, не съ одинаковой полнотой, независимо цѣлымъ рядомъ геометровъ. Эти идеи смутно сознавали уже Саккери и Ламбертъ. Къ этимъ идеямъ пришелъ Гауссъ, всю жизнь размышлявшій надъ основами геометріи подъ сводами Геттингенской обсерваторіи; объ этихъ идеяхъ пишетъ Гауссу нѣкто Швейкартъ, юристъ изъ Магдебурга, состоявшій съ 1812 по 1817 г.г. профессоромъ права въ Харьковѣ; племянникъ послѣдняго Тауринусъ, безвременно погибшій талантливый юноша Вахтеръ; къ этимъ идеямъ пришелъ де-Тилли. Наконецъ, полное развитіе этихъ идей дали Іоаннъ Больэ и Лобачевскій, затратившіе на это всю свою жизнь, не зная другъ друга, не встрѣчая сочувствія ни съ чьей стороны.

Между тѣмъ это было одно изъ наиболѣе поразительныхъ завоеваній человѣческой мысли.

Точка отправленія у всѣхъ этихъ геометровъ одна и та же. Они имѣютъ въ виду доказать постулатъ отъ противнаго. Они исходятъ поэтому изъ предположенія, что это предложеніе несправедливо; иными словами, они принимаютъ, что перпендикуляръ и наклонная къ сѣкущей могутъ и не пересѣкаться. Цѣль изслѣдованія, какъ обыкновенно при доказательствахъ отъ противнаго, заключается въ томъ, чтобы, развивая слѣдствія такого допущенія, придти къ абсурду, т. е. къ явному противорѣчію съ предыдущими постулатами.

Однако, тонко разматывая выводы этого абсурднаго на первый взглядъ допущенія, Лобачевскій и Больэ къ такому противорѣчію не пришли. Т. е. они пришли къ разительному противорѣчію съ интуиціей, съ тѣмъ, что доступно глазу; но не было противорѣчія логическаго, не было противорѣчія съ остальными постулатами Евклида. Напротивъ, тонкій анализъ этихъ геніальныхъ людей нанизывалъ одинъ выводъ на другой, и, чѣмъ дальше шли эти выводы, тѣмъ глубже становилось убѣжденіе, что здѣсь противорѣчія вовсе нѣтъ; что возможна другая геометрія, отличная отъ нашей,—геометрія, которая принимаетъ всѣ остальные постулаты Евклида, а вмѣсто пятаго постулата—принимаетъ противоположное допущеніе. Какъ мы уже сказали, эта геометрія расходится съ интуиціей, съ тѣмъ, что мы видимъ: въ этой геометріи два перпендикуляра къ одной прямой на плоскости не остаются на равныхъ одинъ отъ другого разстояніяхъ, а безпредѣльно расходятся; въ этой геометріи нѣтъ подобныхъ фигуръ, сумма угловъ прямоугольнаго треугольника всегда меньше $2d$ и мѣняется отъ одного треугольника къ другому; и при всемъ томъ она поразительно стройна, она изъ себя разматываетъ свою своеобразную тригонометрію, а отсюда аналитическую и дифференціальную геометрію.

Чтобы дѣйствительно уяснить себѣ, что такое неевклидова геометрія, ее нужно изучить. Это поверхностное изложеніе въ публичной рѣчи имѣетъ только цѣлью лишній разъ обратить вниманіе на эти въ высшей степени замѣчательныя идеи; но для того, кто продѣлаетъ эту тонкую работу мысли, кто усвоитъ эту замѣчательную систему, для того это цѣлое міровоззрѣніе. „Изъ ничего“, писалъ Іоаннъ Больэ отцу, „я создалъ цѣлый міръ“.

Нужно было много таланта, чтобы этотъ міръ создать, нужно было еще больше смѣлости, чтобы раскрыть его людямъ, чтобы выступить публично съ этими идеями. Гауссъ не рѣшался на это въ теченіе цѣлой жизни, и только ближайшіе его друзья были посвящены въ странныя идеи великаго геометра относительно основъ геометріи. Онъ откровенно говоритъ въ своихъ письмахъ, что опасается крика Беотійцевъ, что осы, вѣковое гнѣздо которыхъ раззоряется, подымутся надъ его головой. А между тѣмъ только его авторитетъ и могъ преодолѣть вѣковые предразсудки. Но онъ этого не сдѣлалъ; напротивъ, всѣ мольбы Тауринуса и Іоанна Больэ не заставили его высказать печатно то, что онъ писалъ объ ихъ сочиненіяхъ въ письмахъ. Не къ чести его должно быть сказано, что несомнѣнно по его винѣ эти талантливые люди преждевременно погибли для жизни и науки.

Первое печатное изложеніе „Новой геометріи“ принадлежитъ Лобачевскому. 12 февраля 1826 г. онъ изложилъ ихъ въ засѣданіи физико-математическаго факультета Казанскаго университета, а въ 1829 г. опубликовалъ въ I томѣ „Записокъ“ Казанскаго университета. Не понятый и осмѣянный, онъ не сжегъ своихъ работъ, какъ Тауринусъ, не ушелъ отъ людей, какъ Больэ. Онъ мужественно боролся за свои идеи цѣлую жизнь; онъ всесторонне ихъ разрабатывалъ и развилъ ихъ неизмѣримо глубже и детальнѣе, чѣмъ Больэ. Не встрѣтивъ ни единаго человѣка, который бы его понялъ, не говорю уже — оцѣнилъ, онъ, слѣпой, на краю могилы еще разъ продиктовалъ свое великое научное завѣщаніе.

То была великая трагедія человѣческой жизни, безкровный подвигъ ученаго.

Гауссъ скончался въ 1855 г. Въ слѣдующемъ году умерли Лобачевскій и Вольфгангъ Больэ, а въ 1860 г. сошелъ въ могилу и І. Больэ. Нѣсколько геніальныхъ людей, стоявшихъ впереди своего вѣка, сошли въ могилу, а ихъ замѣчательныя творенія были забыты.

Къ какому выводу, однако, приводитъ эта новая геометрія по отношенію къ пятому постулату Евклида? Какъ мы сказали выше, доказать этотъ постулатъ — значило бы обнаружить, что, принимая остальные постулаты Евклида, мы логически вынуждены принять и этотъ. Но если оказывается, что мы вовсе не вынуждены принять также пятый постулатъ, что, сохраняя остальные постулаты Евклида, мы можемъ построить геометрію, замѣнивъ пятый постулатъ противоположнымъ допущеніемъ, то это означаетъ, что пятый постулатъ не представляетъ собой логическаго слѣдствія изъ остальныхъ постулатовъ Евклида, что онъ и не можетъ быть доказанъ. Этотъ выводъ неизбѣженъ, если правильна геометрія Лобачевскаго, если она не приводитъ къ абсурду, какъ бы далеко мы ее ни развивали. Итакъ, мы стоимъ передъ дилеммой: либо геометрія Лобачевскаго въ своемъ развитіи необходимо должна привести къ абсурду, и тогда постулатъ Евклида доказанъ; либо геометрія Лобачевскаго не содержитъ противорѣчія, тогда невозможно доказать Евклидова постулата. Если бы Лобачевскій *доказалъ*, что его геометрія *не можетъ* привести къ абсурду, сколько бы мы ее ни развивали, то вопросъ былъ бы рѣшенъ. „Какъ это ни странно“, говоритъ Оствальдъ, „но общая черта въ психологіи всякаго изслѣдователя заключается въ томъ, что онъ не доходитъ до конца того пути, который онъ нашелъ и проложилъ“. У Лобачевскаго здѣсь дѣло было не въ психологіи. Всю жизнь онъ старался доказать, что его система не можетъ привести къ противорѣчію, но это ему не удавалось. Онъ былъ чрезвычайно близокъ къ этому, если хотите, въ скрытомъ видѣ это доказательство у него уже есть, но онъ не можетъ надлежащимъ образомъ его формулировать; ему не хватаетъ для этого еще одной идеи.

Въ началѣ шестидесятыхъ годовъ Петерсъ началъ издавать переписку между Гауссомъ и Шумахеромъ. Во второмъ томѣ, появившемся въ 1860 г., помѣщены два письма отъ 1831 г., изъ которыхъ второе содержитъ краткое изложеніе взглядовъ Гаусса на основы геометріи. Въ пятомъ томѣ, появившемся въ 1863 г., помѣщено письмо, въ которомъ Гауссъ даетъ восторженный отзывъ о работѣ Лобачевскаго.

Эти письма обратили вниманіе всего математическаго міра на работы Лобачевскаго, и его „Воображаемая геометрія" вновь была призвана къ жизни. Оставляя въ сторонѣ скромные труды Бальцера, Баттальини и Гуэля, имѣвшіе цѣлью выяснить идеи Лобачевскаго, мы обращаемся къ работѣ Бельтрами, появившейся въ 1868 г.

Бельтрами много занимался теоріей поверхностей; цѣлый рядъ мемуаровъ, опубликованныхъ имъ по этому предмету, относится къ обширному циклу тѣхъ работъ, которыя имѣютъ въ виду развить идеи, изложенныя Гауссомъ въ его безсмертномъ мемуарѣ „Disquisitiones generales circa superficies curvas".

Какъ плоскость имѣетъ свою геометрію, которую мы называемъ планиметріей, такъ и кривая поверхность можетъ имѣть свою геометрію. Наиболѣе извѣстна въ этомъ смыслѣ геометрія сферы, на которой окружности большихъ круговъ замѣняютъ прямыя линіи плоской геометріи. Сферическая геометрія изучаетъ образы на сферической поверхности, сферическіе треугольники, условія ихъ конгруэнтности, измѣреніе ихъ площадей. Эта геометрія естественно отличается отъ плоской геометріи, такъ какъ мы имѣемъ здѣсь другую поверхность, другіе образы. Замѣчательное свойство сферы заключается въ томъ, что части этой поверхности могутъ передвигаться по ней безъ разрыва и складокъ; она вездѣ имѣетъ, какъ говорятъ геометры, одинаковую, или постоянную кривизну. Изслѣдованіемъ такого рода поверхностей, на которыхъ возможно такое передвиженіе, много занимались еще до Бельтрами; при этомъ обнаружилось, что существуютъ два главныхъ типа этихъ поверхностей: одинъ—сферическій, другой—Бельтрами назвалъ псевдосферическимъ. И вотъ совершенно неожиданно Бельтрами обнаружилъ, что на этихъ поверхностяхъ имѣетъ мѣсто плоская геометрія Лобачевскаго. Это значитъ: на каждой части такой поверхности образы сохраняютъ здѣсь совершенно тѣ же соотношенія, какія имѣютъ мѣсто между соотвѣтствующими образами въ планиметріи Лобачевскаго. Подобно тому, какъ на сферѣ стороны сферическаго треугольника связаны уравненіями сферической тригонометріи, элементы псевдосферическаго треугольника связаны тѣми уравненіями, которыя составляютъ тригонометрію Лобачевскаго. Всѣ странности плоской геометріи Лобачевскаго находятъ себѣ здѣсь не только подтвержденіе, но и поясненіе.

Мемуаръ Бельтрами въ короткое время получилъ широкое распространеніе въ математическомъ мірѣ. Впечатлѣніе, произведенное имъ, было громадно. Причина отрицательнаго отношенія къ неевклидовой геометріи заключалась въ томъ, что геометры связывали съ геометрическими понятіями опредѣленныя представленія, съ которыми геометрія считалась неразрывно связанной. Поэтому геометрическая система, находившаяся въ прямомъ противорѣчіи съ тѣми образами, съ которыми геометрія считалась неразрывно связанной, казалась непонятной однимъ и даже нелѣпостью другимъ. Съ появленіемъ мемуара Бельтрами все сразу измѣнилось. Двумѣрная гиперболическая геометрія получила реальное истолкованіе, былъ указанъ рядъ образовъ, къ которымъ она примѣняется. Говорить о нелѣпости этой системы сдѣлалось невозможнымъ; напротивъ, построеніе этой системы a priori и ея подтвержденіе a posteriori служили лучшимъ подтвержденіемъ формальнаго характера геометріи; — точка зрѣнія, которую до нѣкоторой степени признавали, можно сказать, всѣ философы, но которую довелъ до конца и имѣлъ смѣлость формулировать во всей ея наготѣ Германъ Грассманъ, также не дожившій до признанія его идей. Но „мудрецъ отличенъ отъ глупца тѣмъ, что онъ мыслитъ до конца“.

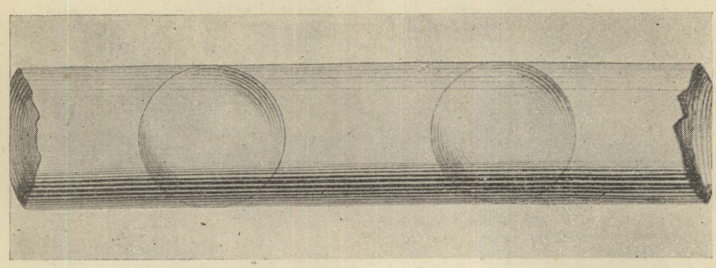
Ничто такъ не содѣйствовало выясненію формальнаго значенія геометріи, какъ открытіе неевклидовой геометріи и ея подтвержденіе a posteriori. Въ чемъ же заключается эта формальная точка зрѣнія? Она говоритъ, что мы жестоко ошибаемся, когда связываемъ геометрію съ нѣкоторыми опредѣленными образами, въ которыхъ намъ рисуются точки, прямыя, углы, плоскости,— главное, когда мы думаемъ, что геометрія связана съ этими образами неразрывно; когда мы себѣ рисуемъ прямую, какъ безпредѣльно тонкій безконечный лучъ, или плоскость, какъ безконечно тонкую пластинку. Напротивъ, съ этими образами геометрія совершенно не связана. Она исходитъ только изъ нѣкоторыхъ терминовъ, съ которыми не связываетъ никакихъ опредѣленныхъ представленій, и изъ нѣсколькихъ основныхъ предложеній, изъ которыхъ она разматывается по законамъ силлогистики, путемъ послѣдовательнаго замѣщенія терминовъ, совершенно независимо отъ того содержанія, которое въ эти термины вкладывается. И если мы этихъ основныхъ терминовъ не умѣемъ выдѣлить, если мы не умѣемъ указать этихъ основныхъ предложеній, то это только потому, что мы ихъ не знаемъ, — потому, что процессъ этотъ совершался ощупью, безсознательно, что шелъ онъ фактически не по тому пути, который соотвѣтствуетъ его дѣйствительному значенію.

Ту систему образовъ на псевдосферѣ, на которой осуществляется плоская геометрія Лобачевскаго, Бельтрами называетъ интерпретаціей этой геометріи. Съ такой точки зрѣнія тѣ образы, въ которыхъ мы привыкли себѣ представлять основные объекты геометріи,—точки, прямыя, плоскости и т. д.—представляютъ собой также только интерпретацію, иллюстрацію обыкновенной Евклидовой геометріи. Это есть одна система образовъ, какъ теперь говорятъ—одно многообразіе, въ которомъ наша геометрія находитъ осуществленіе. Но это не единственная совокупность объектовъ, не единственное многообразіе, къ которому примѣняется наша геометрія. Возможны другія системы объектовъ, другія многообразія, къ которымъ также примѣняется обыкновенная Евклидова геометрія.

Постараюсь выяснить это на простѣйшемъ примѣрѣ. Выберемъ опредѣленный радіусъ, скажемъ въ 1 футъ, и представимъ себѣ всѣ безъ исключенія сферы въ пространствѣ, имѣющія этотъ радіусъ. Они представляютъ собой нѣкоторую совокупность, комплексъ, какъ мы уже сказали, многообразіе. Забудемъ теперь на короткое время, что мы прежде обычно разумѣли подъ терминами „точка", „прямая" и т. д., и условимся подъ словомъ „точка" разумѣть каждую изъ нашихъ сферъ; эти сферы мы будемъ называть точками*). Представимъ себѣ далѣе безконечные цилиндры того же радіуса; эти цилиндры мы будемъ называть прямыми. Мы будемъ говорить, что точка лежитъ

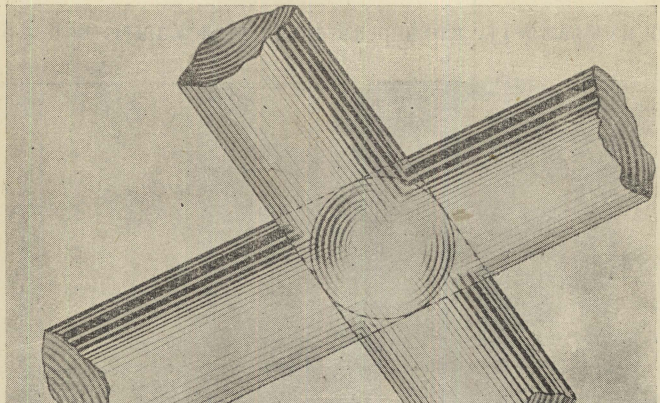
*) Для ясности мы отмѣчаемъ разрядкой, когда слова „точка" и „прямая" употребляются въ этомъ новомъ своемъ значеніи.

на прямой, когда соотвѣтствующая сфера цѣликомъ лежитъ внутри соотвѣтствующаго цилиндра, т. е. вписана въ этотъ цилиндръ: цилиндръ касается сферы по окружности большого круга



Фиг. 3.

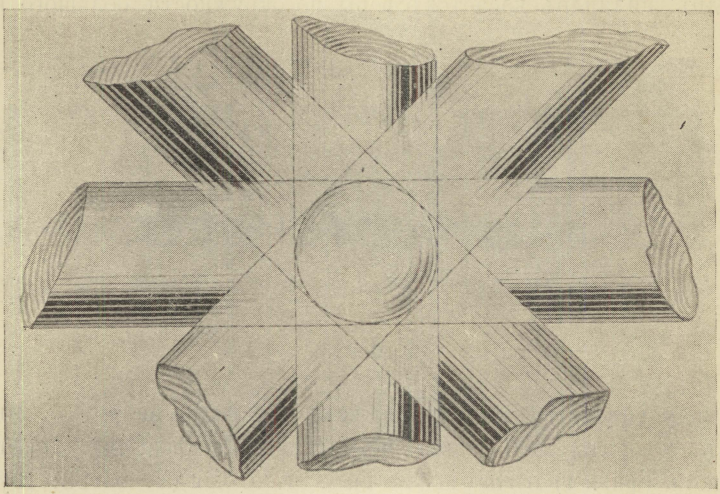
въ виду равенства діаметровъ, какъ это видно на фиг. 3. Мы будемъ говорить, что наши прямыя пересѣкаются, когда они имѣютъ (фиг. 4) общую точку, т. е. когда соотвѣтствующіе



Фиг. 4.

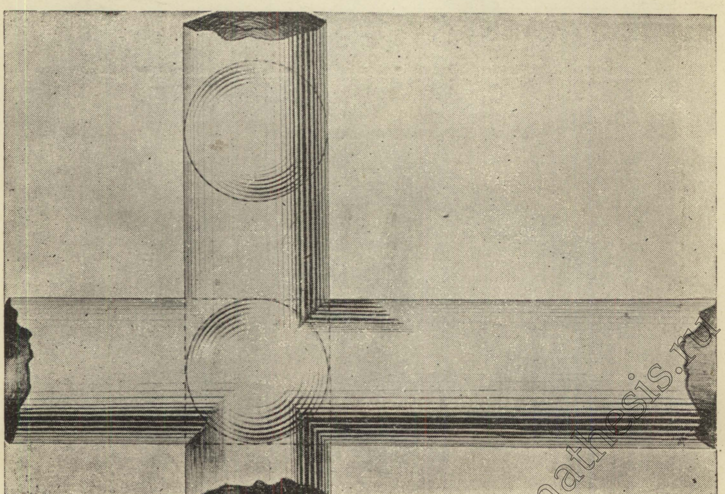
цилиндры имѣютъ общую сферу, и т. д. Въ такомъ случаѣ къ этимъ образамъ, къ этому многообразію вполнѣ примѣняется Евклидова геометрія. Фигура 3 изображаетъ, что двѣ наши точки вполнѣ опредѣляютъ проходящую черезъ нихъ прямую линію.

Фигура 5 изображаетъ, что черезъ одну и ту же точку проходитъ множество прямыхъ, имѣющихъ эту общую точку. Фи-



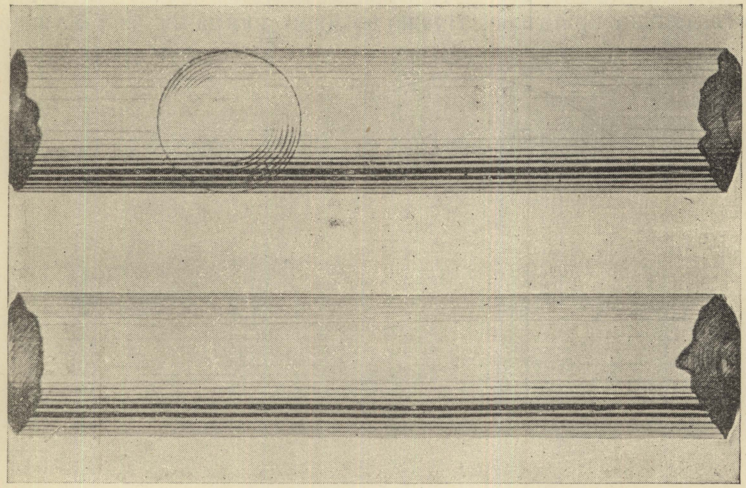
Фиг. 5.

гура 6 изображаетъ, что черезъ точку, лежащую внѣ прямой,



Фиг. 6.

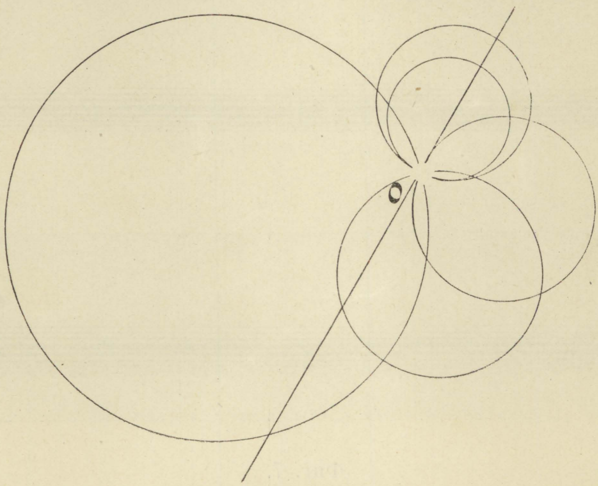
можно къ ней провести только одинъ перпендикуляръ фигура 7 изображаетъ, что черезъ точку, лежащую внѣ прямой, можно къ ней провести только одну параллельную прямую и т. д. Это, кажется, очень ясно; къ этому многообразію такъ же примѣняется обыкновенная Евклидова геометрія, какъ она примѣняется къ тѣмъ образамъ, съ которыми мы обычно соединяемъ понятія о точкахъ, прямыхъ и т. д. Это другая интерпретація Евклидовой геометріи, другое многообразіе, къ которому она примѣняется.



Фиг. 7.

Но можетъ быть, это слишкомъ ясно, можетъ быть, я взялъ слишкомъ тривіальное многообразіе, я, такъ сказать, сохранилъ тѣ же точки и прямыя, только сдѣлалъ ихъ толще. Позвольте для выясненія этой чрезвычайно важной идеи остановиться еще на одномъ примѣрѣ, на одномъ многообразіи, указанномъ талантливымъ французскимъ геометромъ Пуанкаре.

Представьте себѣ на плоскости всевозможныя окружности всевозможныхъ радіусовъ, проходящихъ черезъ одну и ту же точку O, связку окружностей, какъ ее принято называть. Будемъ теперь подъ точками разумѣть, какъ обыкновенно, точки нашей плоскости, за исключеніемъ только точки O; мы выбросимъ, мы опустимъ эту точку, мы исключимъ ее изъ плоскости, ея нѣтъ въ нашемъ новомъ многообразіи. Я грубо это выразилъ на этой фигурѣ (фиг. 8), вырѣзавъ кружокъ вокругъ точки О. Итакъ, нашими новыми точками будутъ служить прежнія точки нашей плоскости, кромѣ точки О. Но подъ прямыми мы будемъ теперь разумѣть окружности и прямыя, проходящія черезъ выключенную точку О (фиг. 8). Какъ это ни странно на первый взглядъ, но въ этомъ многообразіи при этомъ пониманіи точекъ и прямыхъ безусловно сохранится Евклидова геометрія; каждое предложеніе обыкновенной геометріи выражаетъ свойство, этому многообразію дѣйствительно присущее. Нужно не много вниманія, чтобы уяснить

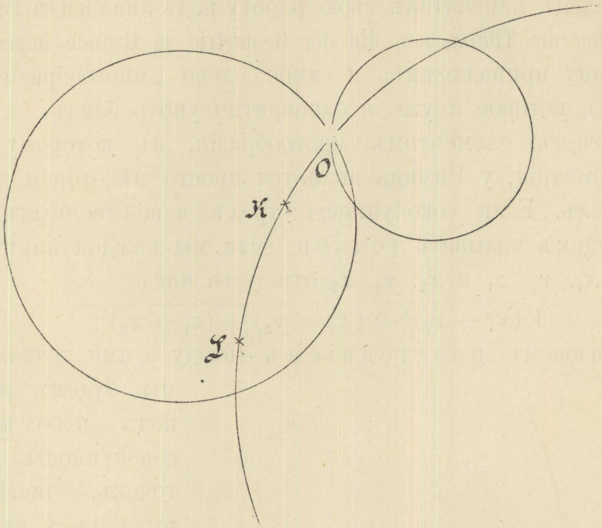


Фиг. 8.

себѣ, что черезъ любыя двѣ наши точки проходитъ всегда одна и только одна наша прямая, т. е. окружность нашей связки (фиг. 9), что двѣ наши прямыя могутъ пересѣкаться только въ одной точкѣ, что изъ точки, взятой на прямой, къ ней можно провести одинъ и только одинъ перпендикуляръ (фиг. 10), что черезъ точку, взятую внѣ прямой, можно провести къ ней только одну параллельную прямую (фиг. 11) и т. д.

Я нѣсколько забѣгаю, быть можетъ, впередъ, но я долженъ сказать, что такихъ многообразій, осуществляющихъ обыкновенную геометрію, можно теперь указать множество. Въ публичной рѣчи, повторяю, можно развѣ только охватить самую идею; но кто продумаетъ эти многообразія глубоко, тому становится кристаллически ясно, что связывать нашу геометрію съ какой-либо опредѣленной системой образовъ нѣтъ ни малѣйшихъ основаній.

Итакъ, различіе между представителями стараго дедуктивизма и строгаго формализма заключается въ томъ, что первые утверждали, что наша геометрія развивается чисто дедуктивно, и въ то же время связывали ее съ опредѣленной системой привычныхъ пространственныхъ образовъ; послѣдніе же утверждають,



Фиг. 9.

что старая геометрія далека отъ такого совершенства, но что истины ея, добытыя чисто эмпирически, абсолютно не зависятъ отъ того субстрата, съ которымъ ее обыкновенно связываютъ, а потому она можетъ и должна быть построена сама изъ себя, т. е. изъ собственныхъ посылокъ, независимо отъ всякаго субстрата опредѣленной формаціи.

Быть можетъ, по существу, эта разница только, такъ сказать, количественная; но при извѣстныхъ размѣрахъ количественныхъ разница сама собой становится качественной.

Первыми рѣшительными приверженцами строгаго формализма въ математикѣ, какъ я уже сказалъ, былъ Германъ Грассманъ; онъ провелъ свои идеи черезъ науку чиселъ и написалъ первую дѣйствительно научную ариѳметику. Въ геометрію же твердой и смѣлой рукой ввели такую постановку вопроса Бернгардъ Риманъ и Германъ ф.-Гельмгольцъ. Физіологъ и математикъ, исходя отъ тонкихъ проблемъ теоріи функцій—одинъ, а другой—отъ вопросовъ физіологической оптики, пришли къ однимъ и тѣмъ же взглядамъ на основы геометріи. Вслѣдъ за появленіемъ работы Бельтрами Дедекиндъ опубликовалъ посмертный мемуаръ Римана „Ueber die Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen“, а вслѣдъ за нимъ и Гельмгольцъ напечаталъ свою работу подъ аналогичнымъ заглавіемъ „Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen“.

Риману принадлежитъ и самое слово „многообразіе“ (Mannigfaltigkeit), которое я уже неоднократно употреблялъ.

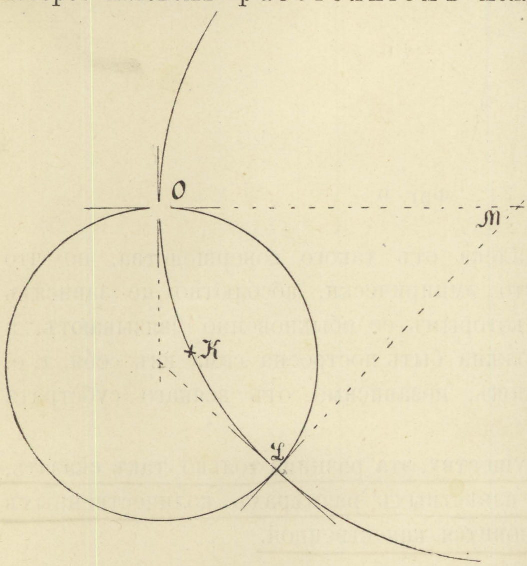
Впрочемъ, элементомъ многообразія, къ которому примѣняется геометрія, у Римана является просто нѣкоторая совокупность чиселъ. Если совокупность трехъ вещественныхъ чиселъ x, y, z будемъ называть точкой, если мы каждой парѣ такихъ точекъ x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 отнесемъ число

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)+(z_1-z_2)^2},$$

которое назовемъ разстояніемъ между этими точками, если мы будемъ разумѣть подъ плоскостью совокупность такихъ точекъ, числа которыхъ (x, y, z) удовлетворяютъ линейному уравненію

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

а подъ прямой—совокупность точекъ, удовлетворяющихъ двумъ такимъ уравненіямъ, то всякому, кто знакомъ съ началами аналитической геометріи, ясно, что въ этомъ численномъ многообразіи, или, какъ теперь чаще говорятъ, „аналитическомъ пространствѣ“, вполнѣ осуществляется геометрія Евклида.



Фиг. 10.

Но если такъ, если, принимая извѣстныя числовыя группы за точки, извѣстныя функціи отъ координатъ за разстоянія, мы получаемъ многообразіе, къ которому примѣняется Евклидова геометрія, то что собственно связываетъ насъ съ этимъ именно выраженіемъ разстоянія? Что будетъ, если мы иначе распредѣлимъ разстоянія. Риманъ, впрочемъ, ставитъ вопросъ нѣсколько иначе. Элементъ, дифференціалъ дуги выражается обычно формулой

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \qquad (1)$$

а въ косоугольныхъ или криволинейныхъ координатахъ формулой вида

$$\sqrt{adx^2 + bdy^2 + cdz^2 + fdxdy + gdydz + hdxdz}, \qquad (2)$$

гдѣ коэффиціенты опредѣленнымъ образомъ зависятъ отъ перемѣнныхъ x, y, z.

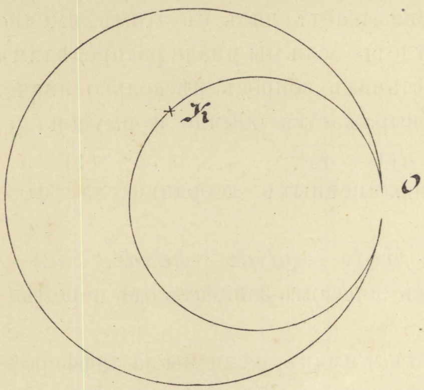
Что же будетъ, спрашиваетъ Риманъ, если мы за дифференціалы длины примемъ любое такое выраженіе, т. е. корень квадратный изъ квадратичной формы отъ дифференціаловъ координатъ, коэффиціенты которой суть совершенно произвольныя функціи отъ координатъ. Риманъ обнаружилъ, что, коль скоро въ этомъ многообразіи возможно свободное движеніе, то выраженіе это можетъ быть всегда преобразованіемъ координатъ приведено къ виду:

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{1 + \frac{a}{4}(x^2 + y^2 + z^2)}. \qquad (3)$$

Здѣсь a есть постоянная, которую Риманъ назвалъ к р и в и з н о й м н о г о о б р а з і я. Если эта постоянная равна нулю, то мы возвращаемся къ выраженію (1), т. е. мы получаемъ Евклидову геометрію. Если a имѣетъ отрицательное значеніе, то мы получаемъ геометрію Лобачевскаго; если же a имѣетъ положительное значеніе, то мы получаемъ третью геометрію, открытую Риманомъ. Эта геометрія еще больше отличается отъ Евклидовой, такъ какъ въ ней не имѣетъ мѣста также и постулатъ, что прямая вполнѣ опредѣляется двумя точками; всѣ прямыя имѣютъ въ этой геометріи конечную длину и попарно пересѣкаются въ двухъ точкахъ и т. д.

Гельмгольцъ дополнилъ этотъ результатъ очень важнымъ указаніемъ; его не такъ просто выразить въ немногихъ словахъ, но, я полагаю, я буду очень близокъ къ истинѣ, если формулирую идею Гельмгольца такъ:

Если въ пространствѣ возможно всякое движеніе, коль скоро къ этому не встрѣчается препятствія со стороны того единственнаго требованія, что разстоянія не должны мѣняться при движеніи, то дифференціалъ дуги необходимо долженъ выражаться формулой (3), т. е. мы необходимо приходимъ къ одной изъ трехъ геометрическихъ системъ.



Фиг. 11.

Этому мемуару нельзя достаточно надивиться. Если хотите, здѣсь все неправильно. Неправильна постановка вопроса, неправильны методы его рѣшенія. И черезъ это сплетеніе ошибокъ Гельмгольцъ благополучно приходитъ къ результату, по существу, совершенно правильному. Софусу Ли принадлежитъ заслуга правильной постановки и рѣшенія этой задачи.

Риманъ и Гельмгольцъ окончательно оторвали геометрію отъ того реальнаго субстрата, съ которымъ ее связывали въ теченіе тысячелѣтій. Вмѣстѣ съ тѣмъ вопросы, связанные съ основами геометріи, принимаютъ аналитическій характеръ и излагать ихъ содержаніе, не предполагая довольно глубокихъ спеціальныхъ знаній, трудно, въ особенности, имѣя передъ собой уже утомленныхъ слушателей. Я хотѣлъ бы еще поэтому остановиться только на одномъ вопросѣ, имѣющемъ большую важность.

Какъ вы видѣли, многообразія, въ которыхъ оперируютъ Риманъ и Гельмгольцъ, чрезвычайно далеки отъ системы тѣхъ образовъ, которые мы связываемъ обычно съ геометрическими представленіями. При всемъ томъ они говорятъ о движеніи въ этомъ многообразіи. Что же такое эти движенія? Каковы тѣ свойства геометрическаго движенія, которыя могутъ быть перенесены въ любое многообразіе, даже въ многообразіе чиселъ, въ аналитическое пространство?

Позвольте прежде всего обратить ваше вниманіе на слѣдующее обстоятельство. Въ геометріи мы постоянно пользуемся движеніемъ, оно играетъ очень важную роль при доказательствахъ, а между тѣмъ фактически мы его никогда не производимъ. Мы не только этого не производимъ, мы рѣшительно не въ состояніи произвести движеній, которыя нужны геометру. Въ самомъ дѣлѣ, движеніемъ мы пользуемся для производства наложенія, мы налагаемъ одно тѣло на другое. Но если мы смотримъ на тѣло только, какъ на часть пространства, то взять часть пространства съ одного мѣста и перенести его на другое — невозможно. *Перенести* можно только тѣло, физическое тѣло; но тогда какъ совмѣстить такое тѣло съ другимъ, какъ можетъ оно проникнуть въ другое тѣло?

Если мы вникнемъ въ то, чѣмъ мы интересуемся, когда аппелируемъ въ геометріи къ движенію, то мы увидимъ, что намъ всегда важно только знать, съ какой точкой совмѣщается при этомъ каждая точка переносимаго тѣла. Иными словами, каждой точкѣ А перваго тѣла отвѣчаетъ нѣкоторая точка В второго тѣла. Мы устанавливаемъ такимъ образомъ соотвѣтствіе между точками перваго и второго тѣла; мы *осуществляемъ* это соотвѣтствіе при помощи движенія, такъ какъ точка В второго тѣла, соотвѣтствующая точкѣ А перваго тѣла, есть та, въ которую движеніе переноситъ эту точку А. Но если мы то же соотвѣтствіе между точками одного и другого тѣла установимъ какъ-либо иначе, то роль механическаго движенія будетъ исчерпана.

Этотъ процессъ не представляетъ исключительной принадлежности геометріи; напротивъ, это чрезвычайно важное, неотъемлемое орудіе нашей мысли въ любой области. „Чрезвычайно важную и характерную способность нашего духа“, говоритъ Дедекиндъ, „представляетъ собой процессъ, заключающійся въ томъ, что мы *относимъ* вещь къ вещи, *ассоціируемъ* одну вещь другой, *отображаемъ* одну вещь въ другой“. Этотъ процессъ въ логикѣ и психологіи издавна называется *ассоціаціей*, въ математикѣ его называютъ *сопряженіемъ*.

Итакъ, *процессъ сопряженія заключается въ томъ, что каждой точкѣ нѣкотораго образа мы относимъ нѣкоторую, вообще говоря, другую точку того же или другого образа.*

Движеніе играетъ для геометріи исключительно ту роль, что оно устанавливаетъ нѣкоторое сопряженіе пространства, многообразія съ самимъ собой.

Чтобы еще лучше выяснить важное понятіе о сопряженіи, возьмемъ простой примѣръ. Пусть AB будетъ нѣкоторый отрѣзокъ. Каждой точкѣ C этого отрѣзка, которая отстоитъ на разстояніи c отъ точки A, отнесемъ, въ качествѣ соотвѣтствующей, точку C', отстоящую на то же разстояніе c отъ точки B. Этимъ каждой точкѣ отрѣзка будетъ отнесена другая точка, этимъ будетъ установлено сопряженіе отрѣзка съ самимъ собой. Это именно сопряженіе можетъ быть также установлено движеніемъ, если мы повернемъ отрѣзокъ другой стороной; каждая точка C упадетъ при этомъ въ соотвѣтствующую точку C'.

Геометрія давно изучала различнаго рода сопряженія; одно изъ нихъ, извѣстное подъ названіемъ проективнаго соотвѣтствія, составляетъ даже предметъ особой дисциплины, получившей названіе проективной геометріи, или геометріи положенія.

Но тѣ соотвѣтствія, которыя устанавливаются движеніями, имѣютъ три важныя особенности.

Во-первыхъ, если нѣкоторое движеніе совмѣщаетъ тѣло A съ тѣломъ B, то каждая точка тѣла A безъ исключенія приходитъ въ нѣкоторую точку другого тѣла B; и обратно, въ каждую точку тѣла B приходитъ нѣкоторая точка тѣла A. Иначе говоря, движеніе относитъ каждой точкѣ перваго тѣла безъ исключенія одну и только одну точку второго тѣла, и обратно: оно относитъ каждую точку второго тѣла одной и только одной точкѣ перваго тѣла.

Это мы выразимъ терминомъ: движенія суть сопряженія совершенныя.

Замѣтимъ при этомъ слѣдующее. Положимъ, что нѣкоторое движеніе совмѣщаетъ тѣло A съ тѣломъ B. Мы всегда можемъ представить себѣ неизмѣняемую среду, неразрывно связанную съ тѣломъ A и охватывающую все пространство. Движеніе совмѣщаетъ каждую точку этой среды съ нѣкоторой точкой пространства, и мы можемъ, такимъ образомъ, сказать, что движеніе есть совершенное сопряженіе пространства съ самимъ собой.

Во-вторыхъ, при движеніи разстоянія между точками не мѣняются; т. е. если точки A и B совмѣщаются съ точками A' и B', то разстояніе AB равно разстоянію $A'B'$. Разстояніе можетъ быть выражено числомъ; съ точки зрѣнія формальной разстояніе только и есть число. Это свойство движенія выражаютъ такъ: при сопряженіяхъ, устанавливаемыхъ движеніемъ, каждая пара точекъ имѣетъ численный инваріантъ, и этой системой инваріантовъ, этой системой разстояній исчерпываются всѣ неизмѣняемыя при движеніи свойства образовъ.

Въ третьихъ, каждое тѣло можетъ быть въ пространствѣ перенесено изъ одного положенія въ другое, т. е. въ пространствѣ существуетъ безчисленное множество различныхъ преобразованій. Но если есть движеніе, которое совмѣщаетъ тѣло А съ тѣломъ В, а затѣмъ другое движеніе совмѣщаетъ тѣло В съ тѣломъ С, то существуетъ третье движеніе, которое совмѣщаетъ тѣло А съ тѣломъ С.

Иными словами, совокупность тѣхъ преобразованій, которыя составляютъ систему движеній въ пространствѣ, обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что каждымъ двумъ преобразованіямъ этой совокупности всегда отвѣчаетъ третье, замѣняющее послѣдовательное пространство первыхъ двухъ преобразованій. Это свойство системы преобразованій очень часто встрѣчается въ математикѣ помимо движеній и характеризуется терминомъ: группа преобразованій.

Итакъ, система движеній въ пространствѣ есть группа совершенныхъ преобразованій, въ которой двѣ и только двѣ точки имѣютъ инваріантъ и при томъ только одинъ.

Это единственныя общія свойства движеній, которыя нужны геометру и которыя нисколько не связаны съ тѣми реальными представленіями, какія съ эмпирическимъ движеніемъ соединяются.

Эта формулировка принадлежитъ Софусу Ли. Выясненію этихъ геометрическихъ свойствъ движенія, быть можетъ, болѣе трудныхъ и неясныхъ работъ Римана и Гельмгольца, содѣйствовала удивительно талантливая по своей простотѣ и изяществу интерпретація геометріи, указанная Клейномъ. Исходя изъ работы Кели, также довольно туманной по своему содержанію, и принимая за движенія совокупность проективныхъ преобразованій, не мѣняющихъ нѣкоторой поверхности второго порядка, Клейнъ самыми элементарными средствами построилъ многообразіе, которое, смотря по выбору неизмѣняемой поверхности, воспроизводитъ Евклидову геометрію, геометрію Лобачевскаго или геометрію Римана. Это осуществленіе геометріи можетъ быть построено какъ геометрически, т. е. на почвѣ Евклидовой геометріи, такъ и аналитически—въ числахъ. И возможность построенія аналитическихъ многообразій, какъ теперь говорятъ „аналитическихъ пространствъ“, осуществляющихъ какъ одну, такъ и другую и третью геометрію служитъ доказательствомъ того, что ни одна, ни другая, ни третья геометрія не содержитъ логическаго противорѣчія,—доказательство, достовѣрное постольку, поскольку достовѣрна ариѳметика.

Софусъ же Ли обнаружилъ, что всякая группа совершенныхъ и непрерывныхъ преобразованій въ непрерывномъ пространствѣ трехъ измѣреній, которыя имѣютъ одинъ и только одинъ инваріантъ—разстояніе между двумя точками—(при нѣкоторыхъ весьма ограниченныхъ дополнительныхъ условіяхъ), необходимо приводитъ либо къ системѣ движеній Евклидова пространства, либо къ системѣ движеній геометріи Лобачевскаго, либо къ системѣ движеній геометріи Римана.

Въ теченіе семидесятыхъ и восьмидесятыхъ годовъ выяснилось, такимъ образомъ, истинное значеніе геометрическихъ системъ Лобачевскаго, Больэ и Римана; выяснилось, что V постулатъ Евклида не зависитъ отъ остальныхъ, не представляетъ собой ихъ слѣдствія, не можетъ быть доказанъ; выяснилось, что геометрія не связана съ той системой образовъ, которую, — быть можетъ, тоже неправильно, — называютъ эмпирическимъ пространствомъ; выяснилось, напротивъ, что геометрія представляетъ лишь рядъ соглашеній, которыми мы удобно выражаемъ обширную категорію соотношеній между физическими тѣлами; что она съ успѣхомъ выражаетъ и иныя соотношенія между иными образами, если послѣднія подходятъ подъ основныя соглашенія; выяснилось, что такихъ многообразій, осуществляющихъ Евклидову геометрію, можно построить множество; выяснилось, что и логическихъ системъ, составленныхъ въ томъ же порядкѣ идей, что и геометрія, можетъ быть не только одна. Выяснилось, что неудовлетворительность существующихъ геометрическихъ системъ, ихъ недостаточная логическая обоснованность, именно въ томъ и коренится, что всѣ основныя понятія и постулаты такъ опредѣлялись, такъ устанавливались, что они были пригвождены къ одному манекену, къ одному многообразію, къ такъ называемому эмпирическому пространству.

Выяснилось, какъ должна быть построена геометрія, если мы хотимъ, чтобы это была дѣйствительно научнологическая система. Для этого нужно исходить изъ системы основныхъ понятій, которыя отнюдь не связываютъ насъ съ эмпирическимъ пространствомъ; нужно положить въ основу такія посылки, которыя могутъ быть перенесены въ другія многообразія, даже въ численныя, или аналитическія.

Установивъ эти посылки, нужно доказать отсутствіе въ нихъ противорѣчія и взаимную ихъ независимость. Средствомъ для этого служитъ ариѳметика, анализъ, численныя, или аналитическія пространства. Чтобы доказать отсутствіе противорѣчія въ системѣ постулатовъ, нужно построить аналитическое пространство, которое удовлетворяетъ всѣмъ постулатамъ; эта возможность всѣмъ постулатамъ удовлетворить и служитъ доказательствомъ отсутствія въ нихъ противорѣчія. Для того же, чтобы доказать независимость постулатовъ, чтобы доказать, что ни одинъ изъ нихъ не представляетъ собой слѣдствія остальныхъ, нужно — по выраженію Вельштейна — построить паталогическія пространства, по одному на каждый постулатъ, съ одной паталогической особенностью каждое. Чтобы доказать независимость каждаго постулата, нужно построить аналитическое пространство, удовлетворяющее всѣмъ остальнымъ постулатамъ и не удовлетворяющее этому постулату. Возможность такого пространства обнаруживаетъ, что, принимая остальные постулаты, мы не вынуждены принять и этотъ постулатъ, онъ поэтому отъ нихъ не зависитъ.

Установивъ такимъ образомъ систему независимыхъ постулатовъ, нужно построить на нихъ геометрію; нужно вести доказательство такъ, чтобы оно оставалось въ силѣ въ каждомъ многообразіи, которое удовлетворяетъ исходнымъ посылкамъ.

Эта задача во всемъ своемъ объемѣ общепризнаннаго рѣшенія еще не получила. Не мало нужно было еще затратить труда и мысли, чтобы подготовить рѣшеніе общей задачи тщательнымъ анализомъ отдѣльныхъ постулатовъ, отдѣльныхъ вопросовъ. Сюда относятся вопросы о расположеніи точекъ на прямой, о непрерывности, объ измѣреніи длинъ, площадей и объемовъ и т. д.

Однако, въ 90-хъ годахъ начинаютъ появляться работы, посвященныя рѣшенію задачи во всемъ ея объемѣ. Сюда, въ первую очередь, относится прекрасная работа Паша, которая далеко не даетъ того, что нужно, но имѣетъ большія заслуги въ томъ отношеніи, что имъ въ первый разъ даны постулаты, которые дѣйствительно даютъ возможность формально обосновать теорію расположенія точекъ на прямой. Задача переносится затѣмъ въ Италію. По почину Пеано, чрезвычайно тонкаго и глубокаго ученаго, за эту задачу принимается цѣлый рядъ молодыхъ ученыхъ: Амодео, Фано, Энрикесъ, Піери. Послѣднему принадлежитъ, на нашъ взглядъ, заслуга построенія первой системы постулатовъ, которые дѣйствительно даютъ возможность формально развить геометрію. Вопросъ о независимости этихъ посылокъ остается открытымъ.

Входить здѣсь въ изложеніе этихъ работъ, т. е. сопоставлять и оцѣнивать отдѣльные постулаты, невозможно. Скажу только, что всѣ эти работы долго оставались въ Европѣ почти неизвѣстными, потому что онѣ были помѣщены въ весьма мало распространенныхъ итальянскихъ академическихъ изданіяхъ.

Честь построенія первой системы постулатовъ, дающихъ возможность формально развить геометрію, была, по моему убѣжденію, незаслуженно приписана Гильберту.

Въ 1899 г., по случаю открытія памятника Гауссу и Веберу, Геттингенскій университетъ выпустилъ юбилейный сборникъ, состоящій изъ двухъ статей, посвященныхъ двумъ славнымъ современникамъ, обезсмертившимъ эту академію. Первая работа принадлежитъ профессору Гильберту и посвящена основамъ геометріи. Работа содержитъ цѣлый рядъ оригинальныхъ идей, въ высшей степени талантливо разработанныхъ. Но предложенная въ этомъ сочиненіи система посылокъ, опредѣляющихъ Евклидову геометрію, на нашъ взглядъ, уступаетъ системѣ Піери. Врядъ ли постулаты Гильберта вполнѣ достаточны для обоснованія геометріи; а отъ ихъ независимости, на которой Гильбертъ настаивалъ въ первомъ изданіи, онъ вынужденъ былъ отказаться во второмъ.

Вопросъ объ обоснованіи геометріи стоитъ, какъ вы видите, въ той стадіи, когда еще нужно использовать идеи великихъ геометровъ для удовлетворительнаго рѣшенія вѣковой задачи.

Заинтересовавшись еще въ студенческіе годы идеями Лобачевскаго, не будучи совершенно знакомъ съ работами итальянской школы, какъ ихъ не зналъ и Гильбертъ, еще до появленія работы послѣдняго, я поставилъ себѣ цѣлью установить систему посылокъ, опредѣляющихъ Евклидову геометрію, и развить ее въ согласіи со всѣми требованіями, которыя формулированы мною раньше и которыя вы читаете въ этихъ положеніяхъ. Эту систему посылокъ, не связанныхъ съ эмпирическимъ пространствомъ, и независимыхъ, поскольку для меня выяснено логическое значеніе этой идеи, я уже въ 1901 г. докладывалъ X съѣзду русскихъ естествоиспытателей и врачей. Это есть синтетическое осуществленіе идей Римана, Гельмгольца и Ли. Но дѣйствительное выполненіе задачи, развитіе самой системы геометріи на основаніи формальныхъ посылокъ потребовали гораздо больше времени и работы, подчасъ мелочно кропотливой, а подчасъ и принципіально трудной, чѣмъ я себѣ могъ представить. Я тѣмъ не менѣе рѣшился выполнить эту задачу до конца и дать не планъ работы, а самую работу. Я былъ бы очень счастливъ, если бы мнѣ удалось оказать нѣкоторое содѣйствіе дѣлу развитія и уясненія идей великихъ геометровъ, полныхъ глубокаго математическаго и философскаго интереса, однимъ обширнымъ комментаріемъ которыхъ только и является настоящее сочиненіе.

MATHESIS

Матезисъ

Книгоиздательство научныхъ и популярно-научныхъ сочиненій изъ области физико-математическихъ наукъ.

П. ЛАКУРЪ и Я. АППЕЛЬ,

ИСТОРИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Пер. съ нѣмецкаго

подъ редакціей „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“.

Свыше 800 стр. большого формата и 800 рис. въ текстѣ и на отдѣльныхъ таблицахъ.

„ИСТОРИЧЕСКАЯ ФИЗИКА“ занимаетъ совершенно особое мѣсто въ ряду элементарныхъ сочиненій по физикѣ: это есть и полный курсъ элементарной физики, и ея исторія. Авторы не только даютъ въ своей книгѣ современное состояніе этой науки, но рисуютъ и ея историческое развитіе, результаты котораго охватываютъ такъ многосторонне и глубоко всю современную жизнь. Благодаря этому и благодаря отсутствію всякой техничности языка — книга изложена въ высшей степени общедоступно — „ИСТОРИЧЕСКАЯ ФИЗИКА“ является книгой для самыхъ широкихъ круговъ читателей, особенно же для тѣхъ, кто желалъ бы укрѣпить свои познанія въ этой наукѣ установленіемъ живой преемственной связи между ея различными дисциплинами, съ которыми знакомитъ средняя школа.

Сообразно своему характеру „ИСТОРИЧЕСКАЯ ФИЗИКА“ обильно снабжена иллюстраціями, въ которыхъ ясно отражается историческое развитіе этой науки. Читатель найдетъ въ ней воспроизведенія рисунковъ **Стевина, Декарта, Герике, Гальвани** и др.

Опредѣленіемъ Основного отдѣла Учен. Ком. М. Н. Пр. выпускъ I признанъ заслуживающимъ вниманія при пополненіи ученическихъ библіотекъ среднихъ учебныхъ заведеній.

СОДЕРЖАНІЕ I ТОМА. §§ 1—74 МІРОЗДАНІЕ. *Свѣдѣнія и открытія до 1630 г.*, §§ 75—114 СВѢТЪ. *Отъ древнѣйшихъ временъ до Ньютона.* §§ 115—270. СИЛА. §§ 271—333. МІРОЗДАНІЕ. *Свѣдѣнія и открытія послѣ 1630 года.* §§ 334—377. ЗВУКЪ. §§ 378—420. ПРИРОДА СВѢТА. §§ 421—441. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗЪ.

СОДЕРЖАНІЕ II ТОМА. §§ 1—189. ТЕПЛОТА. §§ 190—250. МАГНИТИЗМЪ. §§ 251—303. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО ДО 1790 года. §§ 304—408. ЭЛЕКТРИЧЕСКІЙ ТОКЪ. §§ 409—455. ПОГОДА.

Цѣна 7 р. 50 к.

СЪ ТРЕБОВАНІЯМИ ОБРАЩАТЬСЯ:

Книгоиздательство „МАТЕЗИСЪ“—Одесса, ул. Новосельскаго 66.

Изъ отзывовъ объ „Исторической физикѣ“.

Изъ Журн. М. Н. Пр. за декабрь 1907 г. „Нельзя не привѣтствовать этого интереснаго изданія...

„Книга читается легко; она содержитъ весьма удачно подобранный матеріалъ и обильно снабжена хорошо выполненными рисунками. Переводъ никакихъ замѣчаній не вызываетъ. Цѣна, при подпискѣ, невысокая, а потому представляется весьма желательнымъ, чтобы наши среднія учебныя заведенія подписались на эту интересную книгу“.

Проф. О. Хвольсонъ.

Вышли въ свѣтъ слѣдующія изданія:

1 и 2. *Абрагамъ,* проф. **Сборникъ элементарныхъ опытовъ по физикѣ,** составленный при участіи многихъ профессоровъ и преподавателей физики. Пер. съ фр. подъ ред. прив.-доц. *Б. П. Вейнберга.*

Часть I: Работы въ мастерской. Различные рецепты — Геометрія. Механика — Гидростатика. Гидродинамика. Капиллярность. Теплота — Числовыя таблицы.

XVI+272 стр. Со многими (свыше 300) рис. Цѣна 1 р. 50 к.

Учен. Ком М. Н. Пр. допущено въ учен. библ. средн. учебн. зав. учит. сем. и гор., по Пол. 31 мая 1872 г., училищъ, а равно и въ безп. нар. чит. библ.

Часть II: Звукъ — Свѣтъ — Электричество — Магнитизмъ.

LXXV+434 стр. со многими (свыше 400) рис. Цѣна 2 р. 75 к.

3. С. Арреніусъ, проф. **Физика неба.** Разрѣшенный авторомъ и дополненный по его указаніямъ пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* Содержаніе: Неподвижныя звѣзды—Солнечная система—Солнце—Планеты, ихъ спутники и кометы—Космогонія.

VIII+250 стр. Съ 66 черными и 2 цвѣтными рис. въ текстѣ и 1 черной и 1 цвѣтной отдѣльными таблицами. Цѣна 2 руб.

Учен. Ком. М. Н. Пр. допущено въ учен., старш. возр., библ. средн. учебн. заведеній, а равно и въ безпл. нар. библ. и читальни.

Успѣхи физики, Сборникъ статей о важнѣйшихъ открытіяхъ послѣднихъ лѣтъ въ общедоступномъ изложеніи, подъ ред. „Вѣстн. Оп. Физики и Элементарной Математики“. Содержаніе: *Винеръ,* Расширеніе нашихъ чувствъ — *Пильчиковъ.* Радій и радіоактивность — *Рихарцъ,* Электрическія волны — *Слаби,* Телеграфированіе безъ проводовъ — *Шмидтъ,* Задача объ элементарномъ веществѣ (основанія теоріи электроновъ).

IV+144 стр. Съ 41 рис. и 2 таблицами. Изд 2-е. Цѣна 75 коп.

Учен. Ком. М. Н. П. первое изданіе допущено въ учен., старш. возр., библ. средн. учебн. заведеній, а равно и въ безпл. нар. библ. и читальни.

5. *Ф. Ауэрбахъ,* проф. **Царица міра и ея тѣнь.** Общедоступное изложеніе основаній ученія объ *энергіи и энтропіи.* Пер. съ нѣм. Съ предисловіемъ *Ш. Э. Гильома,* Вице-Директора Международнаго Бюро Мѣръ и Вѣсовъ.

VIII+56 стр. Изд. 2-е. Цѣна 40 к.

Учен. Ком. М. Н. П. первое изданіе допущено въ учен., старш. возр., библ средн. учебн. заведеній, а равно и въ безпл. нар. библ. и читальни.

6. *С. Ньюкомъ,* проф. **Астрономія для всѣхъ.** Пер. съ англ. Съ предисловіемъ прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.*

XXIV+285 стр. Съ портретомъ Автора, 64 рис. и 1 таблицей. Цѣна 1 р. 50 к.

Учен Ком. М. Н. П. допущено въ учен., старш. возр., библ средн. учебн. заведеній, а равно и въ безпл. нар. библ. и читальни.

7. *Г. Веберъ и І. Вельштейнъ.* **Энциклопедія элементарной математики. Томъ I. Энциклопедія элементарной алгебры,** обраб. проф. *Веберомъ.* Пер. съ нѣм.. подъ ред. прив. доц. *В. Ф. Кагана.* Книга I, **Основанія ариѳметики,** гл. I—X. Книга II. **Алгебра,** гл. XI—XIX. Книга III. **Анализъ** гл. XX—XXVIII. 650 стр. Цѣна 3 р. 50 к.

Учен. Ком. М. Н. П. признана заслуживающей вниманія при пополн. уч. библ. средн. учебн. заведеній.

8. *Дж. Перри,* проф. **Вращающійся волчокъ.** Публичная лекція. Пер. съ англ. VII+96 стр. 63 рис. Цѣна 60 к.

Учен. Ком. М. Н. Пр. признана заслуживающей вниманія при пополненіи учен. библ. средн. учебн. заведеній.

9. *Р. Дедекиндъ,* проф. **Непрерывность и ирраціональныя числа.** Пер. прив.-доц. *С. Шатуновскаго* съ приложеніемъ его статьи **Доказательство существованія трансцендентныхъ чиселъ** 40 стр. Цѣна 40 к.

Учен. Ком. М. Н. Пр. признана заслуживающей вниманія при пополненіи учен. библ. средн. учебн. заведеній.

10. *К. Шейдъ,* проф. **Простые химическіе опыты для юношества.** Пер. съ нѣм., подъ ред. лаборанта Новороссійскаго университета *Е. С. Ельчанинова.* 192 стр. съ 79 рис. Ц. 1 р. 20 к.

11. *Э Вихертъ,* проф. **Введеніе въ геодезію.** Лекціи для преподавателей средн. учебн. заведеній. Пер. съ нѣм. 80 стр. съ 41 рис. Цѣна 35 коп.

12. *Б. Шмидъ.* **Философская христоматія.** Пособіе для среднихъ учебныхъ заведеній и для самообразованія. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *Н. Н. Ланге.* 170 стр. Цѣна 1 руб.

Учен. Ком. М. Н. Пр. признана заслуживающей вниманія при пополн. учен. библ. средн. учебн. зав.

13. *С. Тромгольтъ.* **Игры со спичками.** Задачи и развлеченія. Пер. съ нѣм. 146 стр Со многими рис. Цѣна 50 коп.

14. *А. Риги,* проф. **Современная теорія физическихъ явленій.** (Радіоактивность, іоны, электроны). Пер. съ III-го (1907) итал. изданія. XII+156 стр. Съ 21 рис. Ц. 1 руб.

15. *В. Ветгэмъ,* проф. **Современное развитіе физики.** Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *Б. П. Вейнберга и А. Р. Орбинскаго.* Съ прилож. рѣчи перваго министра Англіи *A. J. Baljour:* **Нѣсколько мыслей о новой теоріи вещества.** VIII+319 стр. Съ 5 портр., 6 отдѣльн. табл. и 33 рис. въ текстѣ. Ц. 2 р.

16. *П. Лакуръ и Я. Аппель.* **Историческая физика.** Пер. съ нѣм. подъ ред. „Вѣстника Опытной Физики и Элементарн. Математики." Подробности ниже.

17. *А. В. Клоссовскій,* заслужен. проф. **Физическая жизнь нашей планеты.** Изд. 2-е. исправлен. и дополнен. 45 стр. Цѣна 40 к.

18. *С. А. Аррениусъ.* **Образованіе міровъ.** Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. Имп. Юрьевск. Унив. *К. Д. Покровскаго.* Ц. 1 р. 75 к.

19. *Н. Г. Ушинскій,* проф. **Лекціи по бактеріологіи.** VIII+136 стр. съ 34 рис. на отдѣльныхъ 15 таблицахъ. Ц. 1 р. 50 к.

Печатаются и готовятся къ печати:

Ф. Кеджори, проф. **Исторія элементарной математики съ нѣкоторыми указаніями для преподавателей.** Пер. съ англ. подъ ред. и съ примѣчаніями прив.-доц. *И. Ю. Тимченко.*

О. Леманъ, проф. **Жидкіе кристаллы и теоріи жизни.** Пер. съ нѣм.

Сундара Роу. **Геометрическія упражненія съ кускомъ бумаги.** Пер. съ англ.

Веберъ и Вельштейнъ, проф. **Энциклопедія элементарной геометріи.**

А. В. Клоссовскій, проф. **Основы метеорологіи.**

Имѣются на складѣ:

Д. Ефремовъ. **Новая геометрія треугольника.** 334+XIII стр. Ц. 2 руб.

Ф. Линдеманъ. **Форма и спектръ атомовъ.** Пер. съ нѣм. 24 стр. Ц. 20 к.

Ф. Мультонъ, проф. **Эволюція солнечной системы.** Цѣна 50 коп.

Подробный каталогъ изданій высылается по требованію безплатно.

Выписывающіе изъ склада изданій „МАТЕЗИСЪ" (Одесса, Новосельск. 66) **на сумму 5 р. и болѣе за пересылку не платятъ.**

5.—

Тип. Акц. Южно-Русскаго
Общества Печатнаго Дѣла.
Одесса, Пушкинская № 18.

Цѣна 35 коп.